

## Übungsblatt 11

### Aufgabe P1 Konfidenzintervall für Exponentialverteilung.

Seien  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unabhängig und identisch verteilt mit  $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$  und  $\lambda > 0$  sei der unbekannte zu schätzende Parameter. Das heißt,  $X_1$  hat die Dichte  $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$ . Weiterhin seien  $X_{(1)} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$  das Minimum der Daten und  $\alpha \in (0, 1)$ . Zeigen Sie, dass

$$K := \left[ -\frac{\ln(1 - \frac{\alpha}{2})}{nX_{(1)}}, -\frac{\ln(\frac{\alpha}{2})}{nX_{(1)}} \right]$$

ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  für  $\lambda$  ist.

---

**Lösung:** Zunächst rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(\lambda \in K) &= \mathbb{P}_\lambda \left( -\frac{\ln(1 - \frac{\alpha}{2})}{n\lambda} \leq X_{(1)} \leq -\frac{\ln(\frac{\alpha}{2})}{n\lambda} \right) \\ &= \mathbb{P}_\lambda \left( X_{(1)} \leq -\frac{\ln(\frac{\alpha}{2})}{n\lambda} \right) - \mathbb{P}_\lambda \left( X_{(1)} \leq -\frac{\ln(1 - \frac{\alpha}{2})}{n\lambda} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Unter Beachtung, dass die Verteilungsfunktion von  $X_i$  gegeben ist durch  $F_\lambda(x) = (1 - e^{-\lambda x}) 1_{\{x>0\}}$  und dass die  $X_i$  i.i.d. sind, rechnen wir nach, dass für alle  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(X_{(1)} \leq x) &= 1 - \mathbb{P}_\lambda(X_{(1)} \geq x) = 1 - \mathbb{P}_\lambda(X_1 \geq x, \dots, X_n \geq x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\lambda(X_i \geq x) = 1 - (1 - \mathbb{P}_\lambda(X_1 \leq x))^n = 1 - e^{-n\lambda x}. \end{aligned}$$

Wenden wir dies in (1) mit  $x = -\frac{\ln(\frac{\alpha}{2})}{n\lambda}$  bzw.  $x = -\frac{\ln(1 - \frac{\alpha}{2})}{n\lambda}$  an, erhalten wir, dass Gleichung (1) gleich ist zu

$$1 - \frac{\alpha}{2} - (1 - 1 + \frac{\alpha}{2}) = 1 - \alpha.$$

---

### Aufgabe P2 Flaschenabfüllung.

Bei einer Flaschenabfüllmaschine einer oberbayerischen Brauerei wird regelmäßig überprüft, ob die mittlere Füllung  $500 \text{ cm}^3$  beträgt. Anhand der Messung des Inhalts von zufällig herausgegriffenen Flaschen ist zu entscheiden, ob die Maschine neu eingestellt werden muss. Frühere Beobachtungen lassen die Annahme zu, dass die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  (zur Beschreibung der Messergebnisse) unabhängig und identisch  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt sind mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu \in \mathbb{R}$  und unbekannter Varianz  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ . Die Vermessung von 20 Flaschen liefert die folgenden (auf volle  $\text{cm}^3$  gerundeten) Füllmengen

496, 500, 498, 497, 504, 493, 491, 501, 502, 502,  
498, 498, 502, 497, 497, 494, 496, 500, 499, 502.

Muss die Maschine neu eingestellt werden, wenn als Fehler  $\alpha = 0.05$  zugelassen wird?

**Hinweis:** Rechnen Sie mit mindestens zwei Stellen nach dem Komma unter Verwendung eines Taschenrechners oder eines anderen elektronischen Hilfsmittels und  $t_{(19;0.975)} = 2.0930$ .

---

**Lösung:** Es soll die Nullhypothese überprüft werden, dass  $\mu_0 = 500$  gilt. Also

$$H_0 : \mu = 500, \quad H_1 : \mu \neq 500.$$

Da die Varianz unbekannt ist, verwenden wir den  $t$ -Test (**0.5 P.**). Dieser sagt uns, dass wir die Nullhypothese ablehnen können, falls

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \right| > t_{(n-1; 1-\alpha/2)}$$

gilt. Hier ist  $\alpha = 0.05$  und  $n = 20$ .

Aus dem Datensatz bestimmen wir

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot \sum_{i=1}^{20} x_i = 498.35 \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{1}{19} \cdot \sum_{i=1}^{20} (x_i - 498.35)^2 = 11.40.$$

Damit gilt

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \right| = 2.19 > 2.0930 = t_{(19;0.975)}.$$

Also muss die Maschine neu eingestellt werden, d.h. die Nullhypothese kann verworfen werden.

---

### Aufgabe P3 Schraubenlänge.

Ein Großkunde kauft Schrauben direkt vom Hersteller. Der Hersteller gibt an, dass die Länge der Schrauben produktionsbedingt schwankt und die Verteilung der Längen einer Normalverteilung mit Erwartungswert 20 mm und Varianz  $0.01 \text{ mm}^2$  entspricht. Der Kunde hat den Verdacht, dass die gelieferten Schrauben nicht diesen Erwartungswert besitzen. Daher misst er bei 100 Schrauben die Länge exakt nach und erhält einen Mittelwert von 20.026 mm. Kann die Hypothese, dass die durchschnittliche Länge der Schrauben 20 mm beträgt, aufgrund dieser Stichprobe verworfen werden, wenn er eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 1% zulässt und

- a) der vom Hersteller angegebenen Varianz glaubt,
- b) auch der angegebenen Varianz nicht glaubt, aber als Stichprobenvarianz  $s^2 = 0.01 \text{ mm}^2$  bestimmt hat? (*Hinweis:*  $t_{(99;0.995)} = 2.626$ .)

---

**Lösung:** Wir testen  $H_0 : \mu_0 = 20$  gegen  $H_1 : \mu_0 \neq 20$ . Es gilt  $n = 100$ ,  $\alpha = 0.01$  und  $\bar{x} = 20.026$ .

a) Bei bekannter Varianz  $\sigma^2 = 0.01$  kann  $H_0$  verworfen werden, falls

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \right| > z_{(1-\alpha/2)}$$

gilt. Man rechnet

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \right| = \left| \frac{20.026 - 20}{0.1} \cdot \sqrt{100} \right| = 2.6.$$

Dies ist größer als  $z_{0.995} = 2.576$ . Somit kann  $H_0$  verworfen werden.

b) Bei unbekannter Varianz, aber vorhandener Stichprobenvarianz  $s^2 = 0.01$  kann  $H_0$  verworfen werden, falls

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \right| > t_{(n-1; 1-\alpha/2)}$$

gilt. Auch hier gilt

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \right| = \left| \frac{20.026 - 20}{0.1} \cdot \sqrt{100} \right| = 2.6$$

Aber  $t_{(99; 0.995)} = 2.626$  ist größer. Entsprechend kann in diesem Fall  $H_0$  nicht verworfen werden.

---

### Aufgabe H1 Monotonie der Binomialverteilung.

Seien  $1 \leq k < n \in \mathbb{N}$  beliebig. Zu  $p \in (0, 1)$  betrachten wir die Verteilungsfunktion

$$F_p(k) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

der Binomialverteilung  $\text{Bin}(n, p)$  zu den Parametern  $n$  und  $p$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung  $p \mapsto F_p(k)$  monoton fallend in  $p$  ist.

---

**Lösung:** (Anmerkung: In dem Fall  $k = 0$  wäre  $F_p(k) = F_p(0) = (1-p)^n$  ebenso monoton fallend.) In dem Fall  $k = n$  wäre  $F_p(n) \equiv 1$  konstant. Betrachten wir die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} F_p(k) &= \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} (jp^{j-1}(1-p)^{n-j} + p^j(n-j)(1-p)^{n-j-1} \cdot (-1)) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p^{j-1}(1-p)^{n-j-1} (j - np) \end{aligned}$$

so sehen wir, dass diese im Fall  $k \leq \lfloor np \rfloor$  negativ ist und im Fall  $k \geq \lfloor np \rfloor$  abgeschätzt werden kann mit

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p^{j-1}(1-p)^{n-j-1} (j - np) < \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{j-1}(1-p)^{n-j-1} (j - np) = \frac{\partial}{\partial p} F_p(n) = 0.$$


---

### Aufgabe H2 BSE.

Zur Erforschung der Übertragbarkeit der Krankheit BSE (bovine spongiforme Enzephalopathie) wurden in einem Tierversuch  $n$  biologisch gleichartigen Mäusen über einen gewissen Zeitraum täglich eine bestimmte Menge Milch von BSE-kranken Kühen verabreicht. Innerhalb dieses Zeitraums entwickelte keine dieser Mäuse irgendwelche klinischen Symptome, die auf eine BSE-Erkrankung hindeuten könnten.

Es bezeichne  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass eine Maus der untersuchten Art unter genau den obigen Versuchsbedingungen innerhalb des Untersuchungszeitraumes BSE-spezifische Symptome aufweist.

- a) Sei  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  mit bekanntem  $n \in \mathbb{N}$  und unbekanntem  $p \in [0, 1]$  und sei  $\alpha \in (0, 1)$  gegeben. Ferner definieren wir für alle  $k \in \{0, \dots, n\}$  die Zahl  $p_o(k)$  als eindeutige Lösung der Gleichung  $\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \alpha$  für  $p$ . Zeigen Sie, dass  $[0, p_o(X)]$  ein einseitiger Konfidenzbereich für  $p$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  ist. (Tipp: Führen Sie die Menge  $M := \{k \in \{0, 1, \dots, n\} : p > p_o(k)\}$  ein.)  
**Hinweis:** Sie dürfen verwenden, dass für alle  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  die Funktion  $(0, 1) \ni p \mapsto \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$  monoton fallend ist.
- b) Konstruieren Sie unter Verwendung von Teilaufgabe a) für die obige Situation ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha \in (0, 1)$  für die unbekannte Wahrscheinlichkeit  $p$  in der Form  $K = [0, p_o(X)]$  (Warum ist hier die untere Grenze 0 sinnvoll?).
- c) Bestimmen Sie  $K$  in b) für  $n = 275$  und  $\alpha = 0.01$ .
- d) Wie viele Mäuse müssen mindestens untersucht werden, damit  $p_o(X) \leq 10^{-4}$  gilt, wenn man  $\alpha = 0.01$  veranschlagt?
- e) Angenommen der wahre Parameter  $p$  läge tatsächlich in dem in b) berechneten Konfidenzintervall  $K$ . Wie viele BSE erkrankte Mäuse würde man dann unter  $10^7$  Mäusen höchstens erwarten?

---

**Lösung:** a) Es seien  $M := \{k \in \{0, 1, \dots, n\} : p > p_o(k)\}$  und  $k_o := \max M$  die größte Realisierung der Trefferzahl  $X$ , für die  $p > p_o(k)$  gilt. Es gilt

$$\mathbb{P}_p(p \leq p_o(X)) = 1 - \mathbb{P}_p(p > p_o(X)) = 1 - \mathbb{P}_p(X \in M).$$

Weiter gilt  $1 - \mathbb{P}_p(X \in M) \geq 1 - \alpha$  genau dann, wenn  $\mathbb{P}_p(X \in M) \leq \alpha$ . Nun gilt

$$\mathbb{P}_p(X \in M) \leq \mathbb{P}_p(X \leq k_o) \leq \mathbb{P}_{p_o(k_o)}(X \leq k_o) = \sum_{j=0}^{k_o} \binom{n}{j} p_o(k_o)^j (1 - p_o(k_o))^{n-j} = \alpha,$$

wobei wir bei der zweiten Ungleichheit den Hinweis verwendet haben. [2 Pkt]

b) Kodieren die Zufallsvariablen  $X_i$ , ob Maus  $i$  BSE-Symptome zeigte ( $X_i = 1$ ) oder nicht ( $X_i = 0$ ) und betrachten wir  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , so ist  $X$ , da wir annehmen können, dass die  $X_i$  unabhängig sind, binomialverteilt mit Parametern  $n$  und  $p$ ,  $p$  unbekannt. Wir können also die Konstruktion aus a) verwenden. [1 Pkt] Nach a) wählen wir  $p_o := p_o(0)$  (hier ist  $k = 0$ , da keine Maus infiziert wurde) als eindeutige Lösung der Gleichung  $(1 - p_o)^n = \alpha$ , was  $p_o = 1 - \alpha^{1/n}$  liefert. [1 Pkt]

c) Einsetzen der Werte liefert  $K = [0, 0.01661]$ . [.5 Pkt]

d) Lösen von  $1 - 0.01^{1/n} \leq 10^{-4}$  liefert  $n \geq 46050$ . [.5 Pkt]

e) Die unter diesen Voraussetzungen höchste Anzahl der erwarteten erkrankten Mäuse ist  $10^7 \cdot 0.01661 = 166100$ . [1 Pkt]

---

### Aufgabe H3 Leuchtmittel.

Eine Firma stellt Leuchtmittel her, wobei sie eine mittlere Brenndauer von mehr als 1500 Stunden garantiert. Die Standardabweichung der als normalverteilt angenommenen Brenndauer beträgt 25 Stunden. Zur Produktionsüberwachung werden von einem unabhängigen Test-Institut 50 Leuchtmittel entnommen und eine mittlere Brenndauer von 1507 Stunden

festgestellt. Sollte man aufgrund dieses Befundes den Herstellungsprozess unterbrechen, wenn eine Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  von

a)  $\alpha = 0.05$       b)  $\alpha = 0.01$

veranschlagt wird? Stellen Sie einen entsprechenden Test auf und beantworten Sie die Frage in Ihrer Testkonfiguration.

---

**Lösung:** Nach den gegebenen Informationen ist die Grungesamtheit  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  mit  $\sigma = 25$ ,  $\mu$  unbekannt,  $n = 50$  und  $\bar{x} = 1507$ .

a) Setze  $H_0 : \mu \leq \mu_0 = 1500$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0 = 1500$ . (0.5 Punkte) Unter Voraussetzung der Gültigkeit von  $H_0$  können wir die Verteilung unserer Testgröße  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  angeben mit  $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$  (1 Punkt). Nun ergibt sich für den kritischen Bereich  $K = (b, \infty)$ , da große Werte der Testgröße  $T$  gegen die Nullhypothese sprechen. (0.5 Punkte) Wir bestimmen  $b$  als das  $(1 - \alpha)$ -Quantil, also  $b = z_{0.95} = 1.6449$  (1 Punkt). Unsere Testgröße liefert bei den oben angegebenen Werten  $T = \frac{1507 - 1500}{25} \cdot \sqrt{50} = 1.98$  (1 Punkt). Offenbar ist  $1.98 \in K$ , und somit ist die Nullhypothese abzulehnen und die Alternativhypothese mit der Stichprobe verträglich, und man sieht sich (bei der **vorher festgelegten** Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0.05$ ) nicht gezwungen den Produktionsprozess zu unterbrechen. (0.5 Punkte)

b) Seien  $H_0$  und  $H_1$  wie oben. Es ändert sich lediglich  $\alpha = 0.01$  und somit auch unser kritischer Bereich  $K = (b', \infty)$ , wobei  $b' = z_{0.99} = 2.3264$ . Als kritischer Bereich ergibt sich also  $K = (2.3264, \infty)$ . (1 Punkt) Offenbar ist  $1.98 \notin K$ . D.h.,  $H_0$  ist mit dieser Stichprobe verträglich, es ist also bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% nichts gegen die Nullhypothese einzuwenden. Dementsprechend müsste bei einer derartig vorher festgelegten Irrtumswahrscheinlichkeit der Produktionsprozess unterbrochen werden. (0.5 Punkte)

---

*Abgabe der Hausübungen: Mittwoch, 15. Januar, 16:00 Uhr*

Viel Erfolg! :)